Practica 9

Multiplicadores de Lagrange.

Ejercicio 1

Considere una placa circular plana de ecuación:

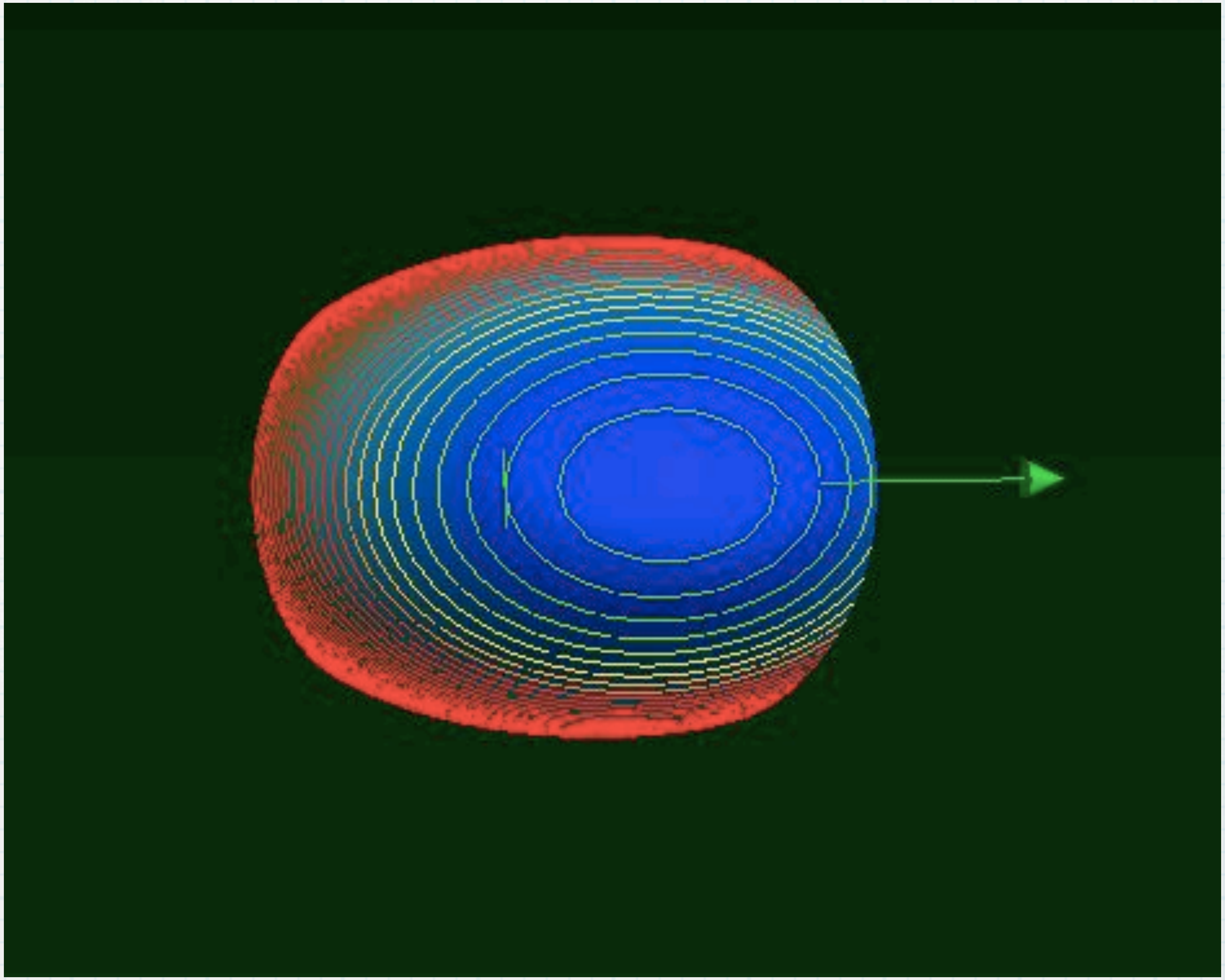
$$x^2 + y^2 \leq 1$$

incluyendo la frontera. Esta placa se calienta tal que el calor en un punto (x,y) esta dado por

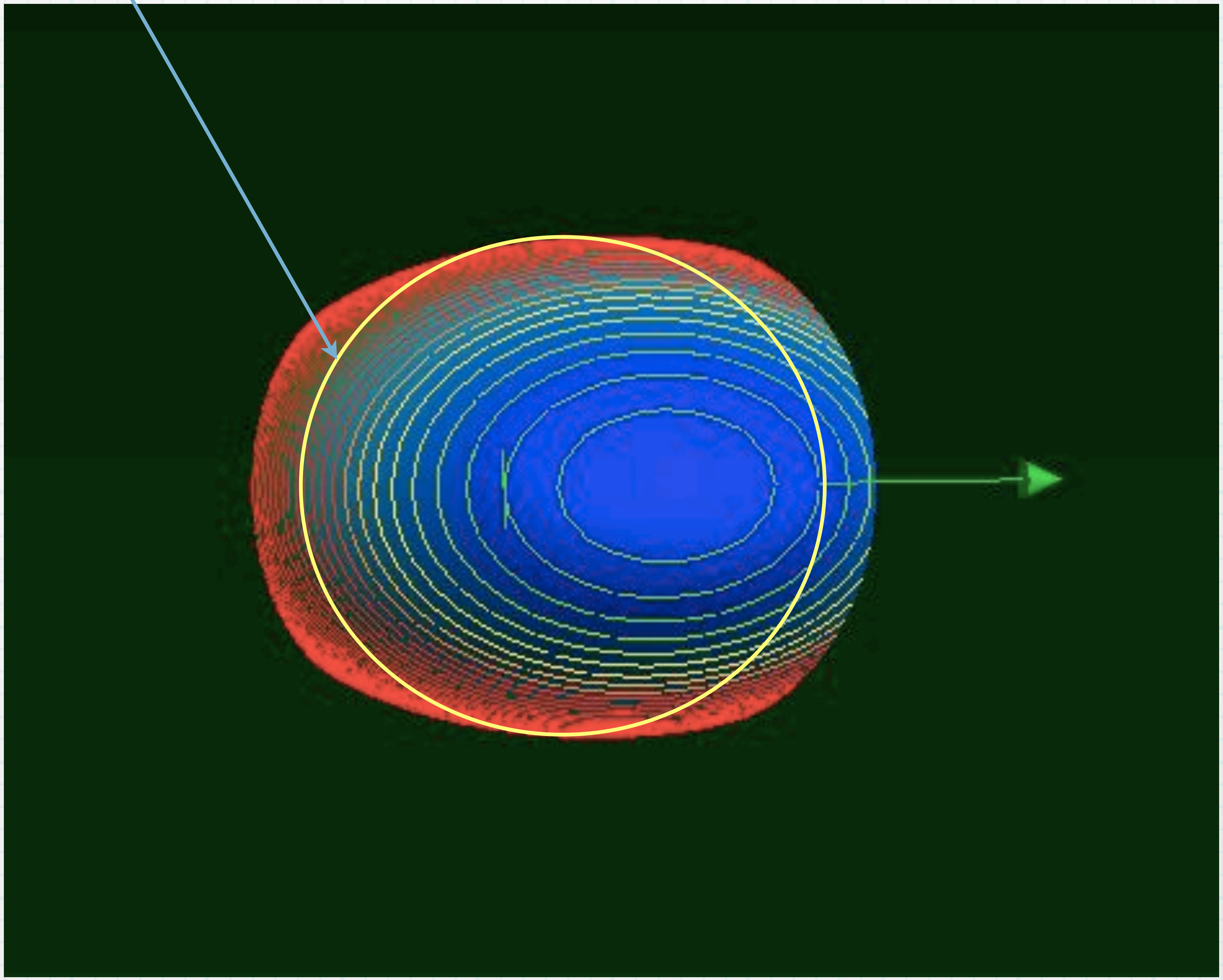
$$T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x \,.$$

Halle la temperatura en los puntos mas calientes y mas fríos sobre la placa.

Gráfica de nivel de la temperatura T(x,y)



Esquema aproximado de la placa



Ejercicio 2.

Sea f(x,y), tal que:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 0$$

¿debe tener f(x,y) un máximo o un mínimo en (a,b)?
Razone su respuesta.

Problema 1.

Extremos sobre una elipse.

Encuentre los puntos sobre la elipse de ecuación

$$x^2 + 2y^2 = 1$$

donde la función

$$f(x, y) = xy$$

alcanza sus valores extremos

$$f(x,y) = xy \longrightarrow \nabla \mathrm{f} = \mathrm{y}\mathbf{i} + \mathrm{x}\mathbf{j}$$

$$g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1 \longrightarrow \nabla \mathrm{g} = 2\mathrm{x}\mathbf{i} + 4\mathrm{y}\mathbf{j}$$

$$\boxed{\nabla \mathrm{f} = \lambda \nabla \mathrm{g} \;\Rightarrow\; \mathrm{y}\mathbf{i} + \mathrm{x}\mathbf{j} = \lambda(2\mathrm{x}\mathbf{i} + 4\mathrm{y}\mathbf{j})}$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \mathrm{y} = 2\mathrm{x}\lambda \\ \mathrm{x} = 4\mathrm{y}\lambda \end{array}}$$

$$\longrightarrow \quad \mathrm{x} = 8\mathrm{x}\lambda^2 \;\Rightarrow\; \lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{4} \qquad \mathbf{0} \qquad \mathrm{x} = 0.$$

Caso 1:

Si x=0 entonces y=0, pero (0,0) no esta en la elipse entonces x no puede ser igual a cero.

$$x \neq 0$$

Caso 2:

Si x es diferente de cero, entonces:

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \mathrm{x} = \pm \sqrt{2}\mathrm{y} \Rightarrow \left(\pm \sqrt{2}\mathrm{y} \right)^2 + 2\mathrm{y}^2 = 1 \Rightarrow \mathrm{y} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right) \qquad \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

El valor extremo de f

Problema 2.

Encuentre los puntos sobre la superficie de ecuación

$$x^2y = 2$$

mas cercanos al origen.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \longrightarrow \quad \nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$$

$$g(x, y) = x^2 y - 2 \quad \longrightarrow \quad \nabla g = 2xy\mathbf{i} + x^2$$

$$\boxed{\nabla f = \lambda \nabla g}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} 2x &= 2xy\lambda \\ 2y &= x^2\lambda \end{aligned}}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{2y}{x^2}}$$

Caso 1:

Si x=0 entonces y=0, pero g(0,0) no es cero, entonces:

$$x \neq 0$$

Caso 2:

Si x es distinto de cero, entonces:

$$2x = 2xy\left(\frac{2y}{x^2}\right) \Rightarrow x^2 = 2y^2 \Rightarrow \left(2y^2\right)y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$$

como y>0

$$x = \pm\sqrt{2} \longrightarrow \left(\pm\sqrt{2}, 1\right)$$

Ejercicio 3.

Utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar el valor mínimo de la función

$$f(x, y) = x + y$$

sujeta ala restricción

$$xy = 16,\ \ x > 0,\ \ y > 0\,.$$